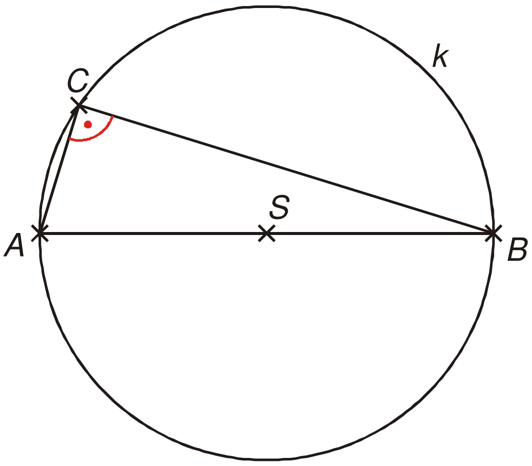
3.4.4 Thaletova věta

Předpoklady: 030403

Př. 1: Narýsuj kružnici $k(S;5\,\text{cm})$ a její průměr AB. Na kružnici narýsuj libovolný bod C různý od bodů A, B (bod C zvol jinak než soused v lavici). Narýsuj trojúhelník ABC. Má nějakou speciální vlastnost? Změř ji.

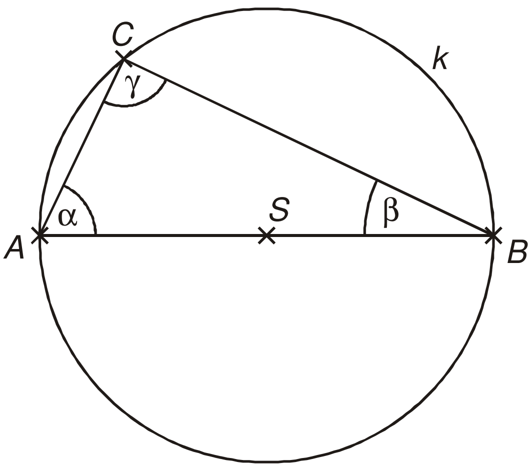


Bez ohledu na to, kde jsme si na kružnici k zvolili bod C, je úhel ACB pravý.

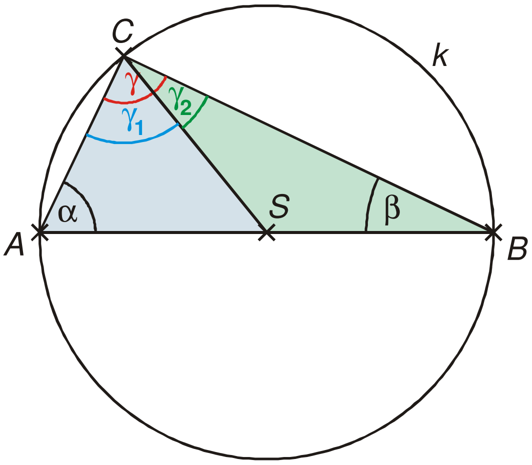
Př. 2: Dokaž vlastnost, kterou jsme objevili v předchozím příkladě.

Jakou vlastnost dokazujeme: Pokud je úsečka AB průměrem kružnice k a bod C leží na kružnici k, je úhel ACB pravý $\Rightarrow$ předpokládáme, že bod C leží na kružnici s průměrem AB a od tohoto předpokladu se musíme dostat k tomu, že úhel γ je pravý.

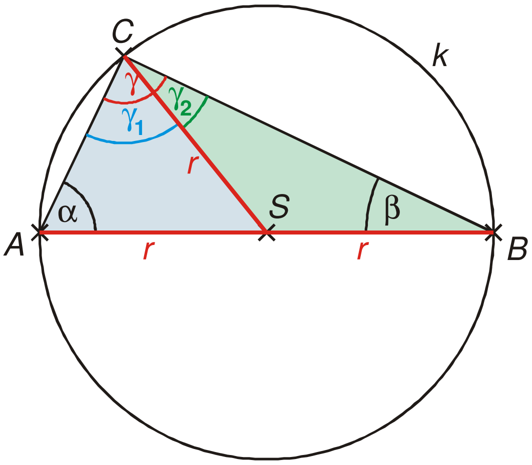
Nakreslíme si obrázek:



Pravý úhel je zřejmě důsledkem toho, že bod C leží na kružnici $\Rightarrow$ zkusíme využít speciální vlastnosti bodů na kružnici – jejich stejnou vzdálenost od středu $\Rightarrow$ do obrázku přidáme úsečku CS.



Trojúhelník ABC i úhel γ jsme rozdělili na dvě části. Vyznačíme do obrázku poloměry kružnice.



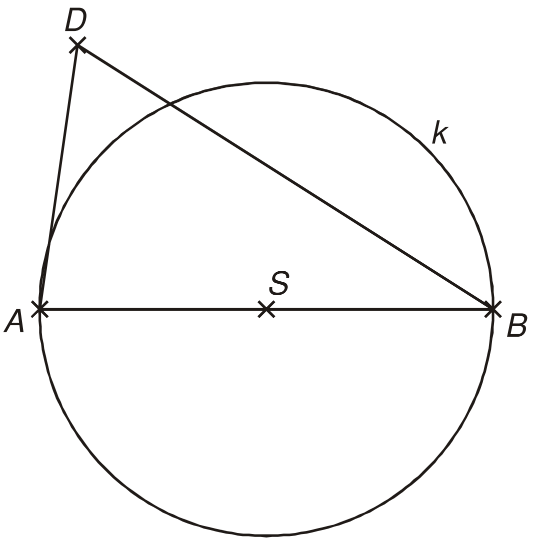
Co nového jsme se dozvěděli o trojúhelnících na obrázku?
Oba mají dvě shodné strany $\Rightarrow$ oba jsou rovnoramenné.
Proti shodným stranám leží shodné úhly $\Rightarrow$ platí $\alpha = \gamma_1$ a $\beta = \gamma_2$.

Použijeme pravidlo, pro úhly v trojúhelníku: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Chceme pravidlo pro úhel γ $\Rightarrow$ zbavíme se úhlů α a β: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = 180°$.
Platí: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma \Rightarrow \gamma + \gamma = 180°$.
$2\gamma = 180° \quad / : 2$
$\gamma = 90°$.
Tímto jsme dokázali, že pokud vrchol C leží na kružnici, je úhel γ pravoúhlý.

Pedagogická poznámka: Pravděpodobnost, že by někdo z žáků dokázal Thaletovu větu ze zadání, je malá, skoro stejně malá je pravděpodobnost, že větší část třídy bude něco mít z toho, že důkaz předvedete u tabule. Já důkaz u tabule dělám, ale na kritických místech dávám žákům čas, aby se sami pohnuli dál. Jde o následující okamžiky:
z čeho vycházíme a kam se musíme dostat,
v obrázku musíme využít, že bod C je na kružnici,
zakreslíme do obrázku úsečky CS.
Samostatné dokončení důkazu od poslední rady není vzácné (i když samozřejmě

není tak vybroušené jako v řešení).

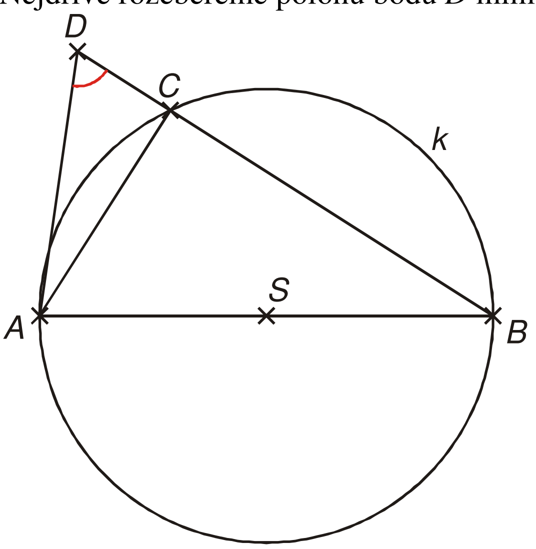
Př. 3: Narýsuj kružnici $k(S;6\,\text{cm})$ a úsečku *AB*, která je jejím průměrem. Najdi mimo kružnici bod *D* tak, aby trojúhelník *ABD* byl pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu *D*.



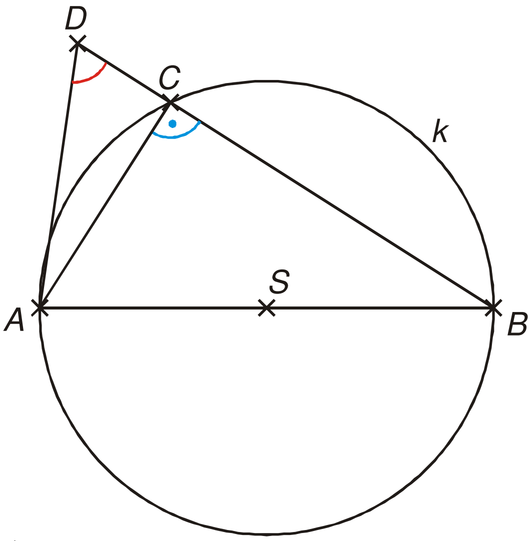
Zdá se, že najít takový bod není možné. Pokud bude bod *D* vně kružnice, bude úhel *ADB* menší než $90°$, pokud bude uvnitř, bude větší než $90°$.

Zkusíme se o tom přesvědčit důkazem.
- Vycházíme z: Bod *D* leží mimo kružnici *k*.
- Dokazujeme: Úhel *ADB* není pravý.

Nejdříve rozebereme polohu bodu *D* mimo kružnici.

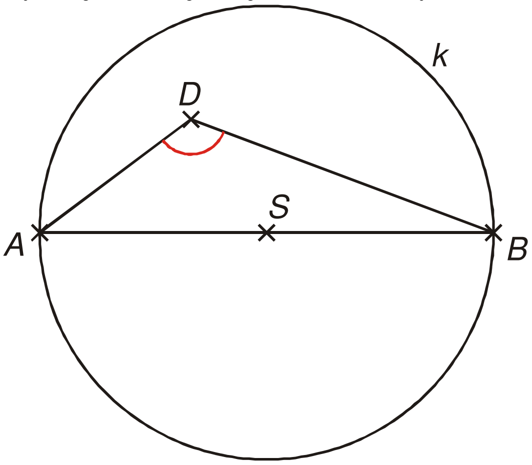


Průsečík úsečky *DB* s kružnicí *k* označíme $C \Rightarrow$ získáme dva trojúhelníky *ABC* a *ACD*.

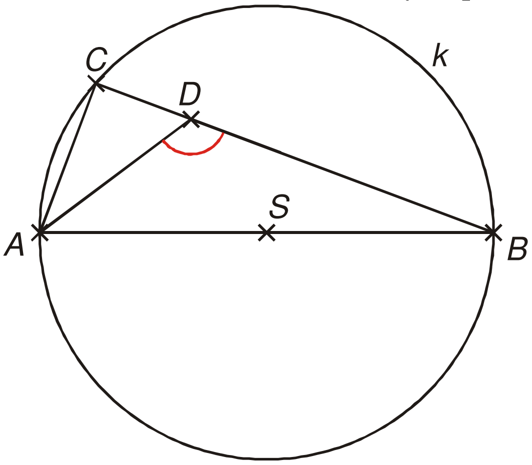


Úhel ACB je pravý (dokázali jsme v předchozím příkladu) $\Rightarrow$ úhel ACD je pravý (dohromady s úhlem ACB dají $180°$) $\Rightarrow$ úhel ADC nemůže být pravý, protože v trojúhelníku ACD by byly dva pravé úhly.

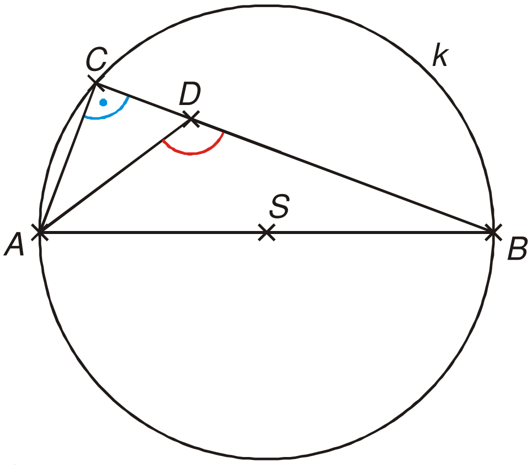
Nyní zjistíme, jaká je situace, když bod D leží uvnitř kruhu.



Prodloužíme úsečku BD tak, aby se protnula s kružnicí k a vznikl bod C.



Získáváme trojúhelníky ADC a ADB.



Úhel ACB je pravý (dokázali jsme v předchozím příkladu) $\Rightarrow$ úhel ADC je menší než $90°$ (zbývající úhly v pravoúhlém trojúhelníku jsou menší) $\Rightarrow$ úhel ADB je větší než $90°$ (součet úhlů ADC a ADB je $180°$).

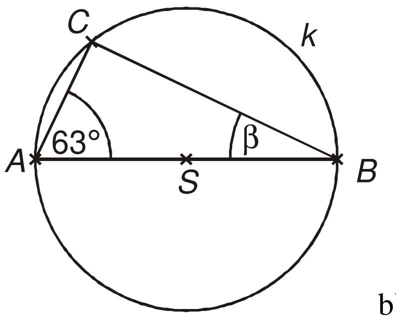
Pedagogická poznámka: Žáci začnou sami protestovat, že najít bod mimo kružnici nejde, protože jsme si to už v předchozím příkladu dokázali. Upozorním je, že to není pravda. Dokázali jsme si, že pokud je bod C na kružnici, tak je u něj pravý úhel, ale to rozhodně neznamená, že u bodu, který na kružnici není, by pravý úhel být nemohl (uvádím příklad se třídou - skutečnost, že všichni žáci přítomní v této třídě jsou z tercie, neznamená, že každý žák mimo tuto třídu z tercie není (každou hodinu někdo chybí)). Pokud si myslí, že bod D neexistuje, musí to dokázat (a mohou klidně využít předchozí větu), čímž plynule přejdeme k důkazu. Žáků, kteří dovedou důkaz do konce od okamžiku, kdy dokreslím do obrázku bod C, je docela dost.

Thaletova věta:
Pro libovolný trojúhelník *ABC* platí:

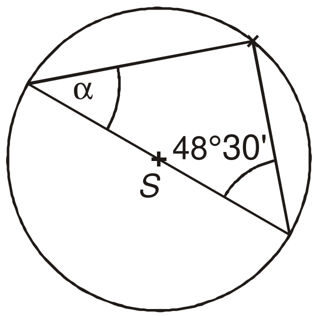
- **je-li trojúhelník *ABC* pravoúhlý s přeponou *AB*, pak vrchol *C* leží na kružnici *k* s průměrem *AB*,**
- **leží-li vrchol *C* na kružnici *k* s průměrem *AB*, je *ABC* pravoúhlý trojúhelník s přeponou *AB*.**

Kružnici *k* nad průměrem *AB* říkáme Thaletova kružnice (zkráceně Thaletovka).

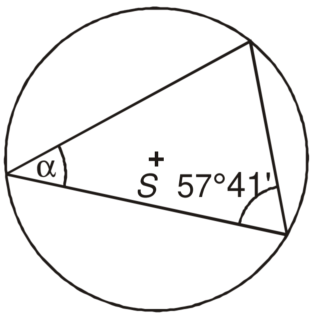
Př. 4: Dopočítej vyznačené úhly.



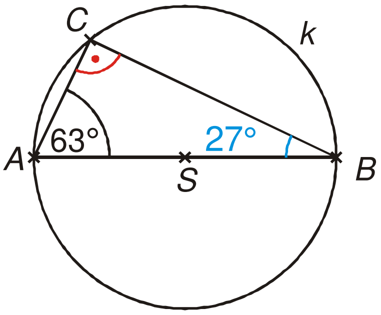
a)



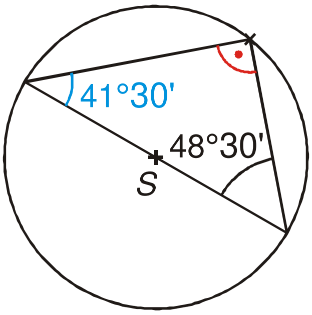
b)



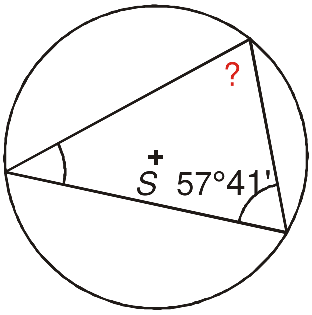
c)



Úhel ACB je pravý (Thaletova věta) $\Rightarrow$ $\alpha+\beta=90°$ $\Rightarrow$ $\beta=90°-\alpha=90°-63°=27°$.



Neoznačený úhel je pravý (Thaletova věta) $\Rightarrow$ $\alpha+48°30'=90°$ $\Rightarrow$ $\alpha=90°-48°30'=41°30'$.

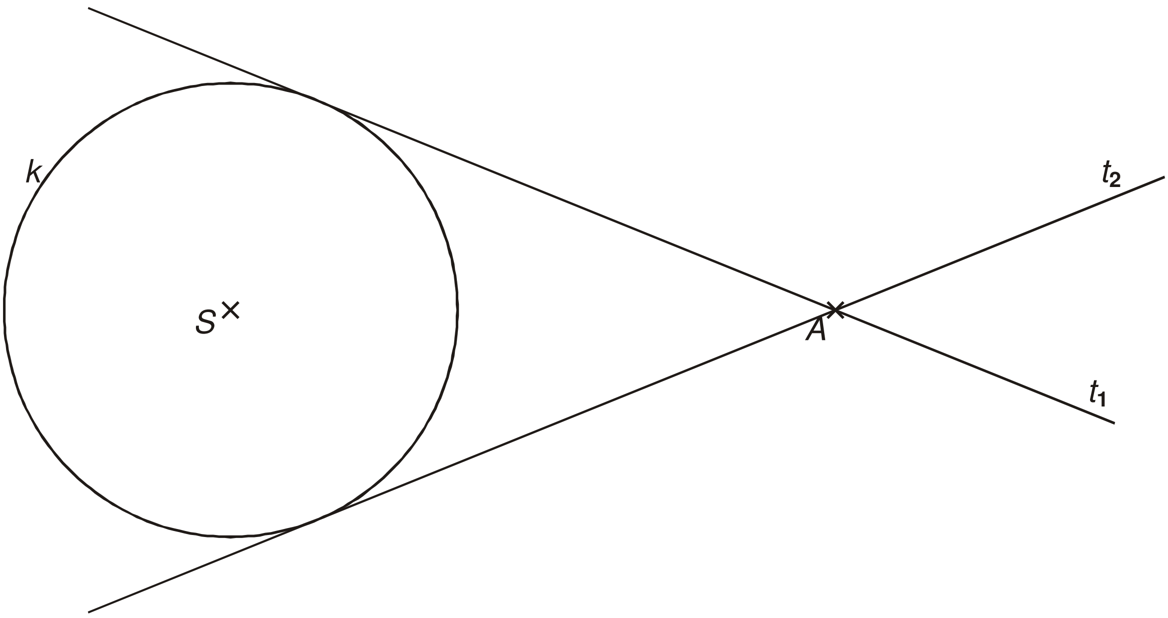


Velikost neoznačeného úhlu neznáme (protilehlá strana není průměr kružnice, proto neplatí Thaletova věta) $\Rightarrow$ nejde určit velikost úhlu α (maximálně můžeme napsat výraz $\alpha=180-57°41'-?$).

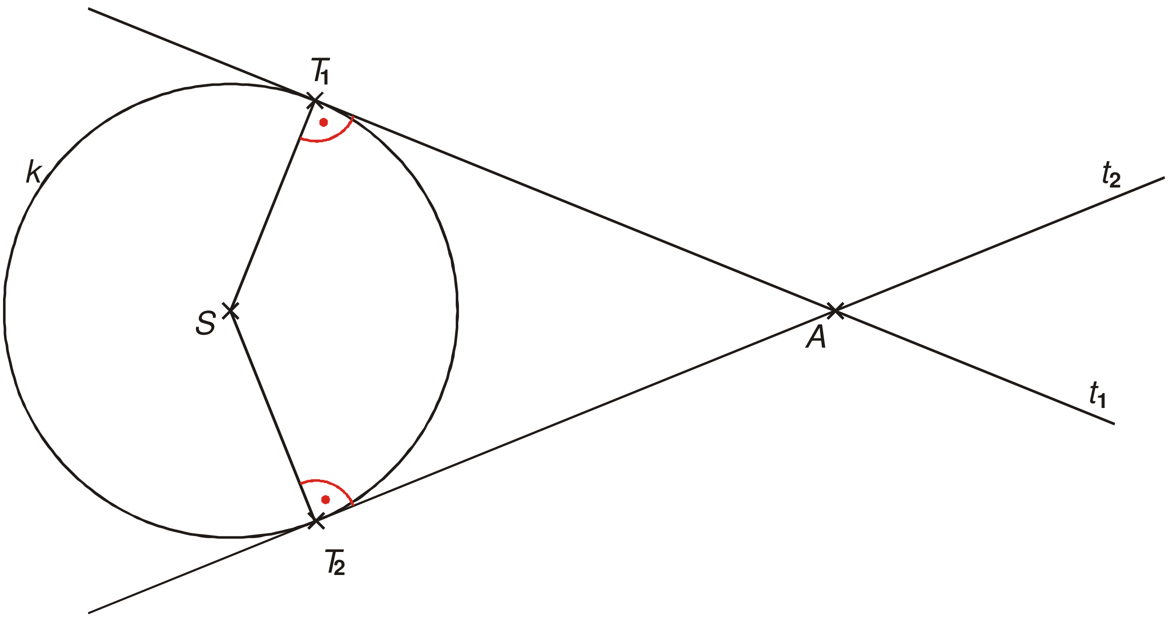
Pedagogická poznámka: Hned na počátku řešení následujícího příkladu je třeba žáky upozornit, že není možné tečnu hledat posouváním pravítka (přestože je to uvedeno v zadání). Není příliš pravděpodobné, že by příklad někdo vyřešil, proto velmi brzo začínám postrkávat od tabule.

Př. 5: Je dána kružnice $k(S;3\text{ cm})$ a bod A, $|SA|=8\text{cm}$. Narýsuj tečny kružnice k jdoucí bodem A. Tečnu není možné „rýsovat" posouváním pravítka, je nutné ji najít jako spojnici dvou bodů.

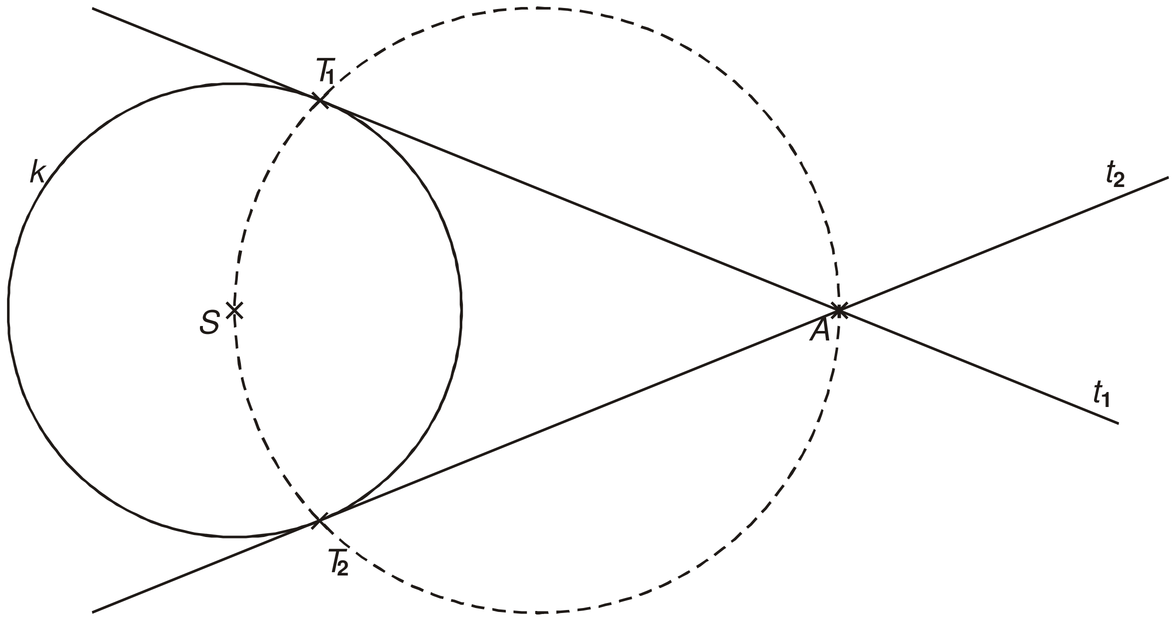
Tečnu máme najít jako spojnici dvou bodů, máme pouze jeden bod (bod A) $\Rightarrow$ nakreslíme si obrázek situace, kterou máme získat.



Pro konstrukci obou tečen máme zatím jediný bod – bod *A*.
Jaký další bod bychom mohli použít?
Zřejmě tečný bod, ve kterém se tečny dotýkají kružnice.
Čím se tyto body vyznačují?



Zdá se, že tečna t_1 je kolmá na úsečku T_1S. Jak by se to dalo využít k nalezení bodu T_1?
Vrcholy pravých úhlů leží na Thaletově kružnici $\Rightarrow$ sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem *SA* (tím zajistíme pravý úhel STA) a tečné body najdeme jako průsečíky této kružnice s kružnicí *k*.



Pedagogická poznámka: Od okamžiku, kdy rozhodnete, že je nutné tečny sestrojit jako spojnice dvou bodů a nabídnete tečné body na kružnici, se vždy najde někdo, kdo konstrukci postrčí o další krok.

Pedagogická poznámka: Náčrtek s Thaletovou kružnicí nechávám na tabuli, zatímco třída rýsuje. Pokud si někdo neví rady, odkazuji na obrázek na tabuli, většinou to stačí.

Př. 6: Sepiš postup konstrukce tečny kružnice $k(S;r)$ z bodu A, který leží mimo kružnici.

Najdeme střed úsečky SA.
Sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem SA - tedy kružnici $l(S_{AS};|S_{SA}A|)$.
Průsečíky kružnic k a l jsou tečné body T_1 a T_2.
Tečny t_1 a t_2 prochází bodem A a body T_1 a T_2.

Tečna kružnice je kolmá na přímku, která spojuje střed kružnice s jejím tečným bodem.

Ke konstrukci tečny z bodu A ke kružnici k využíváme Thaletovu kružnici nad průměrem SA.

Shrnutí: Trojúhelník sestrojený nad průměrem své opsané kružnice je pravoúhlý.